Вестник Тюменского государственного университета.
2014. № 7. Физико-математические науки. Информатика. 182-191

© **А.П. ДЕВЯТКОВ**

Тюменский государственный университет
anglin@mail.ru

УДК 515.126.83

БОРЕЛЕВСКИЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

BOREL MULTIVALUED MAPPINGS

АННОТАЦИЯ. В статье рассматриваются многозначные отображения метрического пространства Y в компактное метрическое пространство X. Показывается, что полунепрерывные многозначные отображения являются борелевскими отображениями первого класса. Изучается вопрос о сохранении борелевости при выполнении над многозначными отображениями операций пересечения, объединения, взятия верхнего и нижнего топологического предела. Показывается, что операции пересечения конечного или счетного числа отображений, а также операция объединения счетного числа отображений увеличивают борелевский класс на единицу; операция объединения конечного числа отображений не изменяет борелевского класса; операция взятия верхнего топологического предела последовательности многозначных отображений увеличивает борелевский класс на два; операция взятия нижнего топологического предела увеличивает борелевский класс на три. Эти результаты применяются далее к отображениям, задаваемым радиальными предельными множествами.

SUMMARY. The article studies multivalued mappings of metric space Y into compact metric space X. It is demonstrated that semi continuous multivalued mappings are Borel mappings of the first class. The author investigates whether Borel measurability remains after the operations of intersection, union, taking upper and lower topological limit performed on multi-valued mappings. It is demonstrated that the operations of intersection of finite or countable number of mappings, and also operation of union of countable number of mappings increase a Borel class by one; the operation of union of finite number of mappings does not change a Borel class; the operation of tacking upper topological limit of sequence of multi-valued mappings increases a Borel class by two; the operation of tacking lower topological limit increases a Borel class by three. These results are applied further to the mappings determined by radial limit sets.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Борелевские многозначные полунепрерывные отображения, верхний и нижний топологический предел последовательности множеств, предельные множества.

KEYWORDS. Borelean, multivalued, semi continuous mappings, upper and lower topological limit of a sequence of sets, limit sets.

Пусть X — топологическое пространство. Обозначим через 2^X множество всех замкнутых подмножеств пространства X. Многозначным отображением топологического пространства Y в топологическое пространство X мы будем называть функцию $F: Y \to 2^X$.

Множество 2^X можно превратить в топологическое пространство различными способами. Опишем наиболее употребительную топологию - *топологию Вьеториса* или *экспоненциальную топологию* [1], [2].

Для некоторого множества $A \subset X$ символом 2^A обозначим множество всех замкнутых в X подмножеств множества A, т.е. $2^A = \{M \in 2^X \mid M \subset A\}$. Экспоненциальная топология в пространстве 2^X — это слабейшая топология, в которой множества 2^A открыты в 2^X для всех открытых A и замкнуты в 2^X для всех замкнутых A. Таким образом, семейство множеств 2^G и $2^X \setminus 2^{X \setminus G} = \{M \in 2^X \mid M \cap G \neq \varnothing\}$, где G пробегает все открытые в X множества, образует предбазу экспоненциальной топологии. Базу экспоненциальной топологии образует семейство множеств вида:

$$B(G_0, G_1, \ldots, G_n) = \{M \in 2^X \mid M \subset G_0, M \cap G_1 \neq \varnothing, \ldots, M \cap G_n \neq \varnothing\},$$

где $n \geq 0$, и множества $G_0, G_1, \ldots, G_n$ открыты в X. Отметим, что пустое множество является изолированным элементом пространства 2^X.

В данной статье мы будем предполагать, что X является *компактным метрическим пространством*. В этом случае экспоненциальная топология совпадает с топологией, порождаемой *метрикой Хаусдорфа* [1], [3]. Расстояние между непустыми множествами $M, N \in 2^X$ в метрике Хаусдорфа определяется формулой:

$$d_H(M, N) = \max\left(\sup_{x \in M} \rho(x, N), \sup_{y \in N} \rho(y, M)\right),$$

где $\rho(x, N) = \inf_{z \in N} \rho(x, z)$ — расстояние от точки x до множества N. За расстояние между пустым и непустым множеством принимается $d_H(\varnothing, N) = \operatorname{diam} X$. Хаусдорфово расстояние между непустыми множествами $M, N \in 2^X$ можно также определить равенством $d_H(M, N) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid M \subset O(N, \varepsilon), N \subset O(M, \varepsilon)\}$, где $O(N, \varepsilon) = \{x \in X \mid \rho(x, N) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность множества N.

Известно, что в случае компактного метрического пространства X пространство 2^X с метрикой Хаусдорфа также будет компактным [3], [4].

Цель статьи состоит в изучении отображений метрического пространства Y в пространство $(2^X, d_H)$ с точки зрения принадлежности их к тем или иным борелевским классам. Понятие борелевских отображений метрических пространств, их классификацию и свойства можно найти в [1]. Отметим лишь, что борелевские отображения нулевого класса — это непрерывные отображения, а борелевские отображения первого класса — это такие отображения, для которых прообраз любого открытого множества имеет тип F_σ, т.е. является объединением счетного числа замкнутых множеств (равносильно: прообраз любого замкнутого множества имеет тип G_δ, т.е. является пересечением счетного числа открытых множеств).

Сначала установим связь между полунепрерывностью и борелевостью многозначных отображений.

Многозначное отображение $F:Y\to 2^X$ называется *полунепрерывным сверху (снизу)*, если для любого открытого (замкнутого) множества $A\subset X$ прообраз $F^{-1}(2^A)=\{y\in Y\mid F(y)\subset A\}$ является открытым (замкнутым) в Y.

Очевидно, что многозначное отображение $F:Y\to 2^X$ непрерывно в экспоненциальной топологии тогда и только тогда, когда оно одновременно полунепрерывно и сверху и снизу.

Предложение 1. *Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — метрическое (или метризуемое) пространство. Если многозначное отображение $F:Y\to 2^X$ полунепрерывно сверху или снизу, то оно является борелевским отображением первого класса.*

Доказательство. Пусть отображение F полунепрерывно сверху. Так как X — компактное метрическое пространство, то пространство $(2^X,d_H)$ также является компактным метрическим пространством, а значит, имеет счетную базу топологии. Следовательно, любое открытое множество этого пространства является объединением счетного числа базисных окрестностей вида $B(G_0,G_1,...,G_n)=\{M\in 2^X\mid M\subset G_0, M\cap G_1\neq\varnothing,...,M\cap G_n\neq\varnothing\}$, где множества $G_0,G_1,...,G_n$ открыты в X. Объединение счетного числа и пересечение конечного числа множеств типа F_σ также имеет тип F_σ. Поэтому для того чтобы показать, что прообраз любого открытого в $(2^X,d_H)$ множества будет F_σ-множеством в Y, нам достаточно проверить, что таковыми будут прообразы множеств $2^G=\{M\in 2^X\mid M\subset G\}$ и $2^X\setminus 2^{X\setminus G}=\{M\in 2^X\mid M\cap G\neq\varnothing\}$ для любого открытого $G\subset X$.

Прообраз $F^{-1}(2^G)$ является открытым в Y по определению полунепрерывности сверху, а открытое множество в метрическом пространстве является F_σ-множеством. Множество G, являясь открытым подмножеством метрического пространства X, представимо в виде объединения счетной последовательности замкнутых множеств $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$.Поэтому прообраз

$$F^{-1}(2^X\setminus 2^{X\setminus G})=\{y\in Y\mid F(y)\cap G\neq\varnothing\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{y\in Y\mid F(y)\cap K_n\neq\varnothing\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F^{-1}(2^X\setminus 2^{X\setminus K_n})=$$

$=\bigcup_{n=1}^{\infty}Y\setminus F^{-1}(2^{X\setminus K_n})$. Так как множества $X\setminus K_n$ открыты в X, а отображение F полунепрерывно сверху, то множества $F^{-1}(2^{X\setminus K_n})$ открыты, а их дополнения $Y\setminus F^{-1}(2^{X\setminus K_n})$ замкнуты в Y. Значит, $F^{-1}(2^X\setminus 2^{X\setminus G})$ — F_σ-множество в Y.

Пусть теперь отображение F полунепрерывно снизу. Тогда для открытого множества $G\subset X$ прообраз $F^{-1}(2^X\setminus 2^{X\setminus G})=Y\setminus F^{-1}(2^{X\setminus G})$ будет открытым (а значит, и F_σ) множеством в Y как дополнение замкнутого множества $F^{-1}(2^{X\setminus G})$.

Обозначим $K_n=\{x\in G\mid \rho(x,X\setminus G)\geq 1/n\}$, $n=1,2,...$. Тогда множества K_n замкнуты и $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$ (это верно для любого метрического пространства X и открытого множества $G\subset X$). Так как по условию метрическое пространство

X компактно, то для любого замкнутого множества $M \subset G$ расстояние $\rho(M, X \setminus G) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in M, y \in X \setminus G\} > 0$. Поэтому найдется номер n такой, что $M \subset K_n$. Следовательно, прообраз

$$F^{-1}\left(2^G\right) = \{y \in Y \mid F(y) \subset G\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{y \in Y \mid F(y) \subset K_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{-1}\left(2^{K_n}\right),$$

т.е. является F_σ-множеством в Y. Предложение доказано.

Рассмотрим вопрос о сохранении борелевости при выполнении над многозначными борелевскими отображениями некоторых основных теоретико-множественных и топологических операций.

Операции над многозначными отображениями определяются поточечно. Например, пересечением многозначных отображений $F_1, F_2 : Y \to 2^X$ называется отображение $F = F_1 \cap F_2 : Y \to 2^X$ такое, что $F(y) = F_1(y) \cap F_2(y)$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.

Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — метрическое (или метризуемое) пространство. Тогда:

1) Если многозначные отображения $F_1, \dots, F_n : Y \to 2^X$ являются борелевскими отображениями класса α , то их пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} F_i : Y \to 2^X$ является борелевским отображением класса $\alpha + 1$;

2) Если многозначные отображения $F_i : Y \to 2^X, i = 1, 2, \dots,$ являются борелевскими отображениями класса α, то их пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i : Y \to 2^X$ является борелевским отображением класса $\alpha + 1$.

Доказательство. Согласно [1; 189], если функции F_1, F_2 полунепрерывны сверху в точке y_0, то их пересечение $F_1 \cap F_2$ также полунепрерывно сверху в точке y_0. По индукции это утверждение распространяется на любое конечное число функций: если функции $F_1, \dots, F_n$ полунепрерывны сверху в точке y_0, то их пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ также полунепрерывно сверху в точке y_0. Так как непрерывное отображение является полунепрерывным сверху, а полунепрерывное сверху — борелевским (по предложению 1), то мы приходим к следующему утверждению: если отображения $F_1, \dots, F_n : Y \to 2^X$ непрерывны, то их пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ является борелевским отображением первого класса.

Возьмем теперь в качестве пространства Y топологическое произведение $\prod_{i=1}^{n} 2^X = \left(2^X\right)^n$, а в качестве отображений F_i — координатные отображения

$$F_i(M_1, \dots, M_n) = M_i, \; i = 1, \dots, n$$

Получим, что операция пересечения $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$, рассматриваемая как отображение пространства $\left(2^X\right)^n$ в 2^X, является борелевским отображением первого класса.

Пусть отображения $F_1,...,F_n : Y \to 2^X$ являются борелевскими отображениями класса α. Рассмотрим отображение $\Phi = (F_1,...,F_n) : Y \to (2^X)^n$, $\Phi(y) = (F_1(y),...,F_n(y)$ для всех $y \in Y$. Так как пространство $(2^X, d_H)$ является компактным метрическим пространством, то оно сепарабельно, и поэтому (см. [1; 391]) отображение Φ является борелевским класса α. Но тогда отображение $\bigcap_{i=1}^{n} F_i : Y \to 2^X$, являясь композицией отображения $\Phi : Y \to (2^X)^n$ класса α и отображения $\bigcap_{i=1}^{n} M_i : (2^X)^n \to 2^X$ первого класса, будет отображением класса $\alpha + 1$ (см. [1; 385]). Утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) доказывается аналогично, основываясь на том факте, что если X — компактное пространство, и отображения F_t, где t пробегает произвольное множество индексов T, полунепрерывны сверху в точке y_0, то и пересечение $\bigcap_{t \in T} F_t$ полунепрерывно сверху в точке y_0 (см. [1; 190], где дается ссылка на работу [5]). Учитывая, что *счетное* произведение $Y = \prod_{i=1}^{\infty} 2^X = (2^X)^{\aleph_0}$ метризуемо, отсюда и из предложения 1 получаем, что операция пересечения $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$, рассматриваемая как отображение пространства $(2^X)^{\aleph_0}$ в 2^X, является борелевским отображением первого класса. Если теперь отображения $F_i : Y \to 2^X, i = 1,2,...,$ являются борелевскими класса α, то их пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i : Y \to 2^X$ будет отображением класса $\alpha + 1$ как композиция отображения $\Phi = (F_i)_{i=1}^{\infty} : Y \to (2^X)^{\aleph_0}$ класса α и отображения $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i : (2^X)^{\aleph_0} \to 2^X$ первого класса. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — метрическое (или метризуемое) пространство. Тогда:*

1). Если многозначные отображения $F_1,...,F_n : Y \to 2^X$ являются борелевскими отображениями класса α, то их объединение $\bigcup_{i=1}^{n} F_i : Y \to 2^X$ также является борелевским отображением класса α;

2). Если многозначные отображения $F_i : Y \to 2^X, i = 1,2,...,$ являются борелевскими отображениями класса α, то отображение $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i} : Y \to 2^X$ (черта означает замыкание в X) является борелевским отображением класса $\alpha + 1$.

Доказательство аналогично доказательству в предыдущей теореме. Утверждение 1) основывается на том факте, что если отображения F_1, F_2 непрерывны в точке y_0, то их объединение $F_1 \bigcup F_2$ также непрерывно в точке y_0 [1; 188]. Утверждение 2) основывается на том факте, что если отображения F_t, где t пробегает произвольное множество индексов T, полунепрерывны снизу в точке y_0, то и отображение $\overline{\bigcup_{t\in T} F_t}$ полунепрерывно снизу в точке y_0 [1; 188].

Рассмотрим теперь операции образования верхнего и нижнего топологического предела последовательности множеств.

Напомним, что *верхним топологическим пределом* последовательности множеств $\{M_i\}$, расположенных в некотором топологическом пространстве X, называется множество $\operatorname*{Ls}_{i\to\infty} M_i$ тех точек $x \in X$, любая окрестность каждой из которых пересекается с бесконечным числом множеств данной последовательности. *Нижним топологическим пределом* последовательности множеств $\{M_i\}$ называется множество $\operatorname*{Li}_{i\to\infty} M_i$ тех точек $x \in X$, любая окрестность каждой из которых пересекается со всеми множествами данной последовательности, начиная с некоторого номера. Нетрудно видеть, что для любой последовательности множеств $\{M_i\}$ ее нижний и верхний топологические пределы будут замкнутыми подмножествами пространства X.

Теорема 3. *Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — метрическое (или метризуемое) пространство. Тогда*

1) Если многозначные отображения $F_i : Y \to 2^X, i = 1,2,...,$ являются борелевскими отображениями класса α, то их верхний топологический предел $\operatorname*{Ls}_{i\to\infty} F_i : Y \to 2^X$ является борелевским отображением класса $\alpha + 2$;

2) Если многозначные отображения $F_i : Y \to 2^X, i = 1,2,...,$ являются борелевскими отображениями класса α, то их нижний топологический предел $\operatorname*{Li}_{i\to\infty} F_i : Y \to 2^X$ является борелевским отображением класса $\alpha + 3$;

Доказательство. Согласно [1; 345] для верхнего топологического предела последовательности множеств имеет место формула $\operatorname*{Ls}_{i\to\infty} M_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} M_i}$. По теореме 2 для любого $k = 1,2,...$ отображение $\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} F_i}$ является борелевским отображением класса $\alpha + 1$ Тогда по теореме 1 отображение $\operatorname*{Ls}_{i\to\infty} F_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} F_i}$ будет борелевским класса $\alpha + 2$. Утверждение 1) доказано.

Доказательство утверждения 2) основывается на следующей формуле для нижнего топологического предела последовательности множеств в метрическом пространстве

$$\operatorname*{Li}_{i\to\infty} M_i = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} [M_i]_\varepsilon} \quad , \quad (*)$$

где символом $[M_i]_\varepsilon$ для краткости обозначено замыкание ε-окрестности множества M_i, т.е. $[M_i]_\varepsilon = \overline{O(M_i,\varepsilon)} = \{x \in X \mid \rho(x, M_i) \le \varepsilon\}$. Докажем эту формулу.

Из самого определения нижнего топологического предела следует, что

$$\operatorname*{Li}_{i\to\infty} M_i = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}(M_i)_\varepsilon \qquad (**)$$

где $(M_i)_\varepsilon = O(M_i,\varepsilon)$ Очевидно, что выражение $(**)$ содержится в выражении $(*)$. Обратно, пусть точка x принадлежит выражению $(*)$, $x \in \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}[M_i]_\varepsilon}$.

Зафиксируем $\alpha_0 > 0$. Тогда $x \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}[M_i]_{\varepsilon_0/3}}$. Следовательно, существует точка $y \in X$ такая, что $\rho(x, y)<\varepsilon_0/3$, и $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}[M_i]_{\varepsilon_0/3}$, т.е. существует номер k_0 такой, что $y \in [M_i]_{\varepsilon_0/3}$ для любого $i \ge k_0$. Тогда $y \in (M_i)_{\varepsilon_0/2}$ для любого $i \ge k_0$. Так как $\rho(x, y)<\varepsilon_0/3$, то отсюда получаем, что $x \in (M_i)_{\varepsilon_0}$ для любого $i \ge k_0$. Следовательно, $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}(M_i)_{\varepsilon_0}$. Так как ε_0 было выбрано произвольно, то $x \in \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}(M_i)_{\varepsilon_0}$, т.е. x принадлежит выражению $(**)$. Таким, образом эквивалентность формул $(*)$ и $(**)$ установлена.

Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ отображение $M \mapsto [M]_\varepsilon$, сопоставляющее множеству $M \in 2^X$ его замкнутую ε-окрестность $[M]_\varepsilon \in 2^X$, является непрерывным в метрике Хаусдорфа. Поэтому, если отображения $F_i : Y \to 2^X, i = 1,2,...$, являются борелевскими класса α, то отображения $[F_i]_\varepsilon : Y \to 2^X$ также будут борелевскими класса α. Полагая $\varepsilon_n = 1/n, n = 1,2,...$, согласно формуле $(**)$ мы можем записать $\operatorname*{Li}_{i\to\infty} F_i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}[F_i]_{1/n}}$. По теореме 1 для любых натуральных n,k отображение $\bigcap_{i=k}^{\infty}[F_i]_{1/n}$ является борелевским класса $\alpha + 1$. По теореме 2 для любого n отображение $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}[F_i]_{1/n}}$ является борелевским класса $\alpha + 2$.

По теореме 1 отображение $\operatorname*{Li}_{i\to\infty} F_i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}[F_i]_{1/n}}$ является борелевским класса $\alpha+3$. Теорема доказана.

Применим полученные результаты к многозначным отображениям, задаваемым предельными множествами.

Напомним сначала понятие предельного множества для одной функции [6], [7].

Пусть в единичном шаре $B=\{x\in R^m \mid |x|<1\}$ евклидова пространства R^m задана функция f со значениями в компактном метрическом пространстве X. Для непустого множества $A\subset B$ и точки $x_0\in\overline{A}$ *предельным множеством функции* f в точке x_0 относительно множества A называется совокупность точек $C(f,A,x_0)\subset X$, определяемая равенством

$$C(f,A,x_0)=\bigcap_{p\in I}\overline{f(A\cap\delta_p)},$$

где $(\delta_p)_{p\in I}$ — произвольная фундаментальная система окрестностей точки x_0.

Пусть теперь в шаре B задана последовательность функций $F=(f_n)_{n=1}^{\infty}$, каждая из которых отображает B в компактное метрическое пространство X.

Предельное множество последовательности функций F, введенное в статье [8], можно определить как

$$C(F,A,x_0)=\bigcap_{p\in I}\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} f_n(A\cap\delta_p).$$

Наконец, *нижнее предельное множество последовательности функций* F (см. [9]) определяется как

$$\underline{C}(F,A,x_0)=\bigcap_{p\in I}\operatorname*{Li}_{n\to\infty} f_n(A\cap\delta_p).$$

Из приведенных формул следует, что любое предельное множество является непустым замкнутым подмножеством пространства X.

Если для любой точки $t\in\partial B$ единичной сферы мы рассмотрим радиус $\gamma_t=\{rt\mid 0\le r<1\}\subset B$, идущий в эту точку, то соответствующие радиальные предельные множества $\lambda(t)=C(f,\gamma_t,t)$, $\mu(t)=C(F,\gamma_t,t)$ и $\nu(t)=\underline{C}(F,\gamma_t,t)$ зададут многозначные отображения сферы ∂B в пространство X, т.е. мы получаем три отображения $\lambda,\mu,\nu:\partial B\to 2^X$.

Относительно отображений λ и μ в статье [10] была доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функции* f *и* $F=(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *непрерывны в* B. *Тогда отображения* $\lambda,\mu:\partial B\to 2^X$, *определяемые равенствами*

$$\lambda(t)=C(f,\gamma_t,t),\quad \mu(t)=C(F,\gamma_t,t),$$

являются борелевскими функциями соответственно второго и четвертого классов.

Теоремы 1-3 позволяют легко обосновать данное утверждение. Действительное, согласно определениям предельных множеств, мы можем записать

$$\lambda(t)=\bigcap_{p=1}^{\infty}\overline{f(\gamma_t^p)}=\bigcap_{p=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{q=1}^{\infty}f(\gamma_t^{p,q})},$$

$$\mu(t)=\bigcap_{p=1}^{\infty}\operatorname*{Ls}_{n\to\infty}f(\gamma_t^p)=\bigcap_{p=1}^{\infty}\operatorname*{Ls}_{n\to\infty}\overline{f(\gamma_t^p)}=\bigcap_{p=1}^{\infty}\operatorname*{Ls}_{n\to\infty}\overline{\bigcup_{q=1}^{\infty}f_n(\gamma_t^{p,q})},$$

где $\gamma_t^{p,q}$ — отрезок радиуса γ_t, характеризуемый условиями $1-2^{-p}\le r\le 1-2^{-p-q}$, а $\gamma_t^p=\bigcup\limits_{q=1}^{\infty}\gamma_t^{p,q}=\{rt\,|\,1-2^{-p}\le r<1\}$. Так как функции f, f_n равномерно непрерывны внvтри шара B то при фиксированных номерах p,q,n отображения $t\mapsto f(\gamma_t^{p,q})$ и $t\mapsto f_n(\gamma_t^{p,q})$ сферы ∂B в пространство 2^X непрерывны в метрике Хаусдорфа. Применяя последовательно теоремы 2 и 1, получаем, что отображение $\lambda(t)$ является борелевским второго класса. Аналогично, применяя теоремы 2, 3 и 1, получаем, что отображение $\mu(t)$ является борелевским четвертого (=1+2+1) класса.

Борелевость отображения $\nu(t)=\underline{C}(F,\gamma_t,t)$ в статье [10] установить не удалось. Теоремы 1-3 позволяют доказать следующее утверждение

Теорема 5. *Пусть функции* $F=(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *непрерывны в* B. *Тогда отображение* $\nu\colon\partial B\to 2^X$, *определяемое равенством* $\nu(t)=\underline{C}(F,\gamma_t,t)$, *являются борелевской функцией пятого класса.*

Доказательство. Согласно определению нижнего предельного множества, имеем как выше $\nu(t)=\bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\operatorname*{Li}\limits_{n\to\infty}\overline{\bigcup\limits_{q=1}^{\infty}f_n(\gamma_t^{p,q})}$. При фиксированных номерах p,q,n отображение $t\mapsto f_n(\gamma_t^{p,q})$ непрерывно. Применяя теоремы 2, 3 и 1, заключаем, что отображение $\nu(t)$ является борелевским пятого (=1+3+1) класса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куратовский К. Топология. Т. 1 М.: Мир, 1966. 595 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология М.: Мир, 1986. 752 с.
3. Хаусдорф Ф. Теория множеств М.-Л.: ОНТИ, 1937. 304 с.
4. Куратовский К. Топология. Т. 2 М.: Мир, 1969. 625 с.
5. Engélking R. Quelques remarques concernant les operations sur les fonctions semi-continues dans les espaces topologiques // Bull. Acad. Polon., 1963. № 11. Pp. 719-726.
6. Носиро К. Предельные множества М.: ИЛ, 1963. 252 с.
7. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств М.: Мир, 1971. 312 с.
8. Кругликов В.И. Предельные множества последовательности функций // Докл. РАН, 1997. Т. 357. № 1. С. 16-18.

9. Девятков А.П. Две иллюстрации понятия предельного множества последовательности функций // Вестник Тюменского государственного университета. 2007. № 5. С. 3-12.

10. Девятков А.П. Отображения в пространство компактов, задаваемые предельными множествами // Математические заметки. 2013. Т. 93. № 3. С. 368-372.

REFERENCES

1. Kuratovskii, K. *Topologiia. T. 1* [Topology. Vol. 1]. Moscow, 1966. 595 p. (in Russian).

2. Engel'king, R. *Obshchaia topologiia* [General topology] / Transl. fr. Eng. by M.Ya. Antonovsky, A.V. Arkhangelsky. Moscow, 1986. 752 p. (in Russian).

3. Khausdorf, F. *Teoriia mnozhestv* [Set theory of sets] / Transl. fr. Germ. by N.B. Vedenisov. Moscow — Leningrad, 1937. 304 p. (in Russian).

4. Kuratovskii, K. *Topologiia. T. 2* [Topology. Vol. 2]. Moscow, 1969. 625 p. (in Russian).

5. Engélking R. Quelques remarques concernant les operations sur les fonctions semicontinues dans les espaces topologiques. *Bull. Acad. Polon.* 1963. № 11. Pp. 719-726.

6. Nosiro, K. *Predel'nye mnozhestva* [Cluster sets]. Transl. fr. Eng. by V.I. Gavrilov. Moscow, 1963. 252 p. (in Russian).

7. Collingwood, E., Lohwater, A. *Teoriia predel'nykh mnozhestv* [The theory of cluster sets] / Transl. fr. Eng. by E.P. Dolzhenko. Moscow, 1971. 312 p. (in Russian).

8. Kruglikov, V.I. Cluster sets of a sequence of functions. *Dokl. RAN — Doklady Akademii Nauk*. 1997. V. 357. № 1. Pp. 16-18. (in Russian).

9. Deviatkov, A.P. Two illustrations to the notion of cluster set of a sequence of functions. *Vestnik Tiumenskogo gosudarstvennogo universiteta — Tyumen State University Herald*. 2007. № 5. Pp. 3-12. (in Russian).

10. Deviatkov, A.P. Maps to compact spaces determined by limit sets. *Matematicheskie Zametki*. 2013. V. 93. № 3. Pp. 368-372. (in Russian).

Автор публикации

Девятков Антон Павлович — доцент кафедры математического анализа и теории функций Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, кандидат физико-математических наук

Author of the publication

Anton P. Devyatkov — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Functions Theory, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University